

Geometria affine su di un campo $\mathbb{K}$.

$$(A, f, V_n(\mathbb{K})) = AG_n(\mathbb{K})$$

$$\Pi = (\mathcal{O}, \mathcal{B}) \quad \mathcal{O} \in A \quad \mathcal{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \text{ base di } V_n(\mathbb{K})$$

$$\Phi_\Pi : \begin{cases} A \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X \rightarrow (x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{ove } \vec{OX} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

$$(\mathbb{K}^n, \tilde{f}, \mathbb{K}^n)$$

$\uparrow$ punti $\nwarrow$ vettori

$$\tilde{f}(P, Q) := Q - P$$

$$\forall \vec{v} \in V_n(\mathbb{K}) : \quad \tau_{\vec{v}} := \begin{cases} A \rightarrow A \\ P \mapsto P + \vec{v} \end{cases} \quad \text{traslazione.}$$

$$\text{in coordinate} \quad \tau_{\vec{v}}(X) = (x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n).$$

Oss: l'insieme di tutte le traslazioni di $AG_n(\mathbb{K})$ è un

Gruppo commutativo isomorfo a $(\mathbb{K}^n, +)$.

• Sottospazio
affine

$S \subseteq A$ tale che

$\exists U \leq V_n(\mathbb{K})$ con

$(S, \check{f}, \mu)$ spazio

affine ove

$$\check{f} = f \circ (S \times S) \times \mu$$

• Sottospazio
lineare.

$$[P; \mu] := \{P + \bar{u} \mid \bar{u} \in U\}.$$

Teorema: Sottospazi affini e sottospazi lineari
coincidono.

Oss: In coordinate i sott. lineari corrispondono esattamente
agli insiemi di soluzioni di sist. lineari compatibili:
 $AX = B$.

Def: Si dice dimensione di un sottospazio $[P; \mu]$

le dim di μ .

μ è detto sottospazio di traslazione

P è detto origine.

$AG_n(\mathbb{K})$

n	$AX=BS$	dim μ	
n	n equazioni	0	punti
<u>$n-1$</u>	<u>$n-1$ equazioni</u>	<u>1</u>	rette
$n-2$	$n-2$ eq.	2	piani
$n-3$	$n-3$ eq.	3	solidi
	<u>1 equazione.</u>	<u>$n-1$</u>	iperpiani

$$[P; \{2\}] = \{P\}.$$

Oss: Siano $\Pi = [P; \mu]$ e $\Sigma = [Q; \omega]$ due
sottospazi affini. Allora se $\Pi \cap \Sigma \neq \emptyset$

$$\Pi \cap \Sigma = [R; \mu \cap \omega] \text{ ove } R \in \Pi \cap \Sigma.$$

Def: Dati dei punti: $P_2 \dots P_k \in A$ si dice

sottospazio affine generato da $P_2 \dots P_k$ il più piccolo sottospazio affine che li contiene tutti.

$$\langle P_2 \dots P_k \rangle$$

In generale i punti $\{P_2 \dots P_k\}$ sono geometricamente indipendenti se essi generano un sott. affine di dimensione $(k-1)$.

(I punti sono giudip. se qualsiasi sottospazio generato da un sottoinsieme proprio di essi è più piccolo di quello da essi stessi generato; l'altro caso k punti generano al più un sottospazio di dim = $k-1$).

Siano $P_2 \dots P_k$ i punti dati e Σ un sott.

che li contiene $\Rightarrow P_1 \in \Sigma \quad Z = [X; W]$

$$\Rightarrow \Sigma = [P_2; W]$$

$$j \geq 1 \quad P_j \in \Sigma \Rightarrow \vec{P_1 P_j} \in W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = L(\vec{P_2 P_2}, \dots, \vec{P_2 P_k}) \leq W. \quad \dim \mu \leq k-1$$

$$[P_2, \mu] \leq \Sigma.$$

$$\text{Viceversa } P_2 \dots P_k \in [P_2, \mu] \Rightarrow \Sigma = [P_2; \mu]$$

$P_1 \rightarrow$ ha coordinate X_i e X è il generico punto di Σ .

$$\vec{P_1 X} \in L(\vec{P_2 P_2}, \dots, \vec{P_2 P_k}) \Rightarrow$$

$$(X - X_1) \in L((X_2 - X_2) \dots (X_k - X_1))$$

$$\begin{array}{c}
 \uparrow k \text{ righe} \\
 k k \left[\begin{array}{c} X_1 - X_1 \\ X_2 - X_1 \\ \vdots \\ X_k - X_1 \end{array} \right] = k k \left[\begin{array}{c} X_2 - X_1 \\ \vdots \\ X_k - X_1 \end{array} \right] \downarrow k-1 \text{ righe}
 \end{array}
 \quad \xleftrightarrow{n \text{ colonne}}$$

I punti $P_2 \dots P_k$ sono indipendenti $\Leftrightarrow$

$$k k \left(\begin{array}{c} X_2 - X_1 \\ \vdots \\ X_k - X_1 \end{array} \right) = k-1$$

posizioni reciproche di sottospazi. $\rightarrow$ studiando i sistemi lineari.

$n=2$
rette

$n=3$
rette/rette
rette/piani
piani/piani

DATO $AX = B$ compatibile

• $AX = 0$ è legato ai sottospazi di traslazione

• $AX_0 = B$ è legato all'esistenza di una inversa non vuota.

$n=2 : n \neq l$

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 & (a, b) \neq (0, 0) \\ a'x + b'y + c' &= 0 & (a', b') \neq (0, 0) \end{aligned}$$

$$AX = B$$

il sistema
omogeneo
non equiv.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} \text{rk}(A) & \text{rk}(A|B) & \infty^1 & \text{rk} & n & n & n \\ \hline 1 & 1 & 0 & \text{r/s} & n & n & n \\ 2 & 2 & 1 & & n & n & n \\ 2 & 2 & 1 & & n & n & n \end{array}$$

$n=3: p_{i \Delta i}$

$$\pi \quad ax + by + cz + d = 0 \quad (a \ b \ c) \neq (0 \ 0 \ 0)$$

$$6 \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad (a' \ b' \ c') \neq (0 \ 0 \ 0)$$

$$\kappa \kappa(\lambda) \left| \begin{array}{c|c} \kappa \kappa(\lambda | \kappa) & \infty^2 \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & \infty^2 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \pi = \sigma \\ \pi // \sigma, \pi \cap \sigma = \phi \\ \pi \cap \sigma = \kappa \text{ rakt.} \end{array}$$

$\pi // \sigma \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{CONSEQUENZA} \quad \pi \cap \sigma = \phi \Rightarrow \pi // \sigma.$$

$n=3: \text{rakt. / p.i. n.o.}$

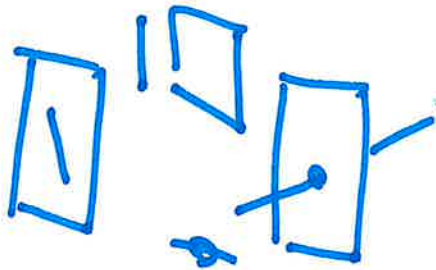
$$\kappa \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right.$$

$$\kappa \kappa \left(\begin{array}{c} a \ b \ c \\ a' \ b' \ c' \end{array} \right) = 2$$

$$= \kappa \kappa \left(\begin{array}{c} a \ b \ c \ d \\ a' \ b' \ c' \ d' \end{array} \right) = 2$$

$$\pi : a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

$\pi k(A)$	$\pi k(A B)$		
2	2	∞^2	$\pi \leq \pi$
②	3	0	$\pi // \pi; \pi \cap \pi = \emptyset$
3	3	1	$\pi \cap \pi = \{P\}$



$$a''x + b''y + c''z = 0$$

è c. lineare di

$$a'x + b'y + c'z = 0$$

$$ax + by + cz = 0$$

$\Rightarrow$ la giacitura del

piano contiene

la direzione della

retta

giacitura = sp. traslazione di un piano

direzione = sp. traslazione di una retta.

$n=3$ $\text{rel} H_2 / \text{rel} H_1$

$$\kappa \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right. \quad \kappa \kappa \left(\begin{array}{l} a \ b \ c \\ a' \ b' \ c' \end{array} \right) = 1$$

$$\kappa \left\{ \begin{array}{l} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{array} \right. \quad \kappa \kappa \left(\begin{array}{l} a'' \ b'' \ c'' \\ a''' \ b''' \ c''' \end{array} \right) = 2$$

$\kappa \kappa(A)$	$\kappa \kappa(A/\mathbb{R})$	∞^1	$n = \lambda$
2	2	0	$\kappa // \lambda ; \kappa \cap \lambda = \emptyset$
2	3	0	$\kappa \cap \lambda = \{P\}$
3	3	1	$\kappa \cap \lambda = \emptyset$
3	4	0	$\kappa \cap \lambda = \emptyset$ $\kappa \cap \lambda \cap \text{somme}$

Ho ed λ sono sghembe $\text{rel}^{1,2,3}$ esse non sono contenute in un piano.

se $\exists \pi: \pi, \Lambda \subseteq \pi \Rightarrow \pi \cap \Lambda = \emptyset \Rightarrow \pi // \Lambda \Rightarrow$ non sono sghembe

Supponiamo che π ed Λ non siano contenute in
stesso piano. Allora 1) $\pi \cap \Lambda = \emptyset$ infatti se

$$\pi = [P; \mu] = [P; L(\sigma)]$$

$$\Lambda = [Q; \omega] = [Q; L(\bar{\omega})]$$

ed $\pi \cap \Lambda \neq \emptyset \Rightarrow$ non il piano rispettivo

$$\pi = [T; L(\bar{v}, \bar{w})]$$

contiene sia π che $\Lambda \Rightarrow \pi$ e $\bar{v}, \bar{w}$

sono indip $\Rightarrow \pi$ è un piano.

se $\bar{v}, \bar{w}$ sono dipendenti $\Rightarrow \pi = \Lambda \Rightarrow$ in

particolare ogni piano che contiene π

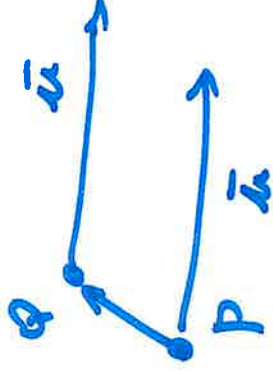
lo contiene entrambi.

2) se fosse nullo $\Rightarrow \exists \vec{u} \in P; L(\vec{u})$

$$\Delta = [Q; L(\vec{u})]$$

$\Rightarrow$ il piano $\pi = [P; L(\vec{u}, \vec{PQ})]$

contiene sia π che Δ .



$$\Rightarrow \pi, \Delta \subseteq \pi.$$

$\Rightarrow$ se π ed Δ non coincidono non contengono in
alcun piano $\Rightarrow$ sono disgiunte e non parallele.
 $\Rightarrow$ sono sghembe.

N.B.: se $\Delta = [P; L(u)]$ ed $\Delta = [Q; L(\vec{w})]$ con

$$\dim L(\bar{x}, \bar{y}) = 2 \quad e \quad r \cap s = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} \notin L(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \dim \langle r, s \rangle = 3$$

$$\text{perché } \langle r, s \rangle = [P, L(\bar{x}, \bar{y}, \vec{PQ})]$$

$\Rightarrow r$ ed s sono sghembe.

$n=2$: consideriamo un polinomio $f(x, y) \in K[x, y]$

con $f(x, y)$ non costante.

Si dice curva algebrica di grado $n = \deg f$

l'insieme dei punti $V(f) := \{ (x, y) \mid f(x, y) = 0 \}$

In particolare, se $n=1 \Rightarrow V(f) = \{ (x, y) \mid ax + by + c = 0 \}$
è una retta.

$n \geq 2$ $\exists f(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_2, \dots, x_n]$

$\Rightarrow$ si dice ~~ipersuperficie algebrica~~

ipersuperficie algebrica di grado $n = \deg f$

l'insieme dei punti:

$$V(f) := \{ (x_2, \dots, x_n) \mid f(x_2, \dots, x_n) = 0 \}.$$

Variet  algebrica = intersezione di ipersuperfici
non vuote

$n=3$ Ipersuperficie di grado $\geq 1 \rightarrow$ piano.

Intersezione 2 piani non paralleli $\rightarrow$ "varieta"
retta.

$$V(f, g) := V(f) \cap V(g)$$

In $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ $V(f) = \emptyset$

In un campo algebricamente chiuso, (e.g. $\mathbb{C}$)

abbiamo che se $V(f) = V(g) \Rightarrow$ esiste un $h \neq 1$

ta che $g \nmid f$ $g = \tilde{g}^h$ e $V(\tilde{g}) = V(f) = V(g)$

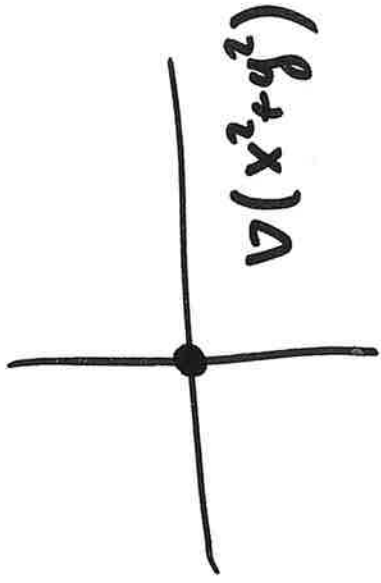
ed anche $f = \tilde{g}^k$ per $k \geq 1$

$$V((x+y)^3) = V((x+y)^7) = V(x+y)$$

$$x(x^2 + y^2 + 1) = 0 \quad x = 0$$

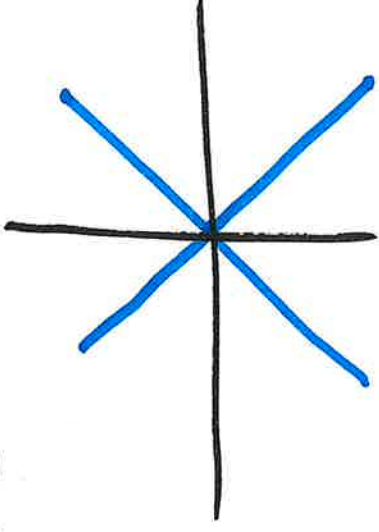
$$V(x^2 + y^2) = \{(0,0)\}.$$

su $\mathbb{R}^2$



$$x^2+y^2$$

su $\mathbb{C}^2$



$$V(x^2+y^2) =$$

$$= V(x+iy)(x-iy) =$$

$$= V(x+iy) \circ V(x-iy)$$

In $\mathbb{C}^2$ un punto P è detto reale se e solo se ha coordinate in $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow P = \bar{P}$.

$$(x_P, y_P) = (\overline{x_P}, \overline{y_P}).$$

In $AG_n(k)$, fasci di rette/piani
stelle di rette etc.

retta: ∞^1 punti

$n=2$

fascio di rette $\rightarrow \infty^2$ rette per

un punto

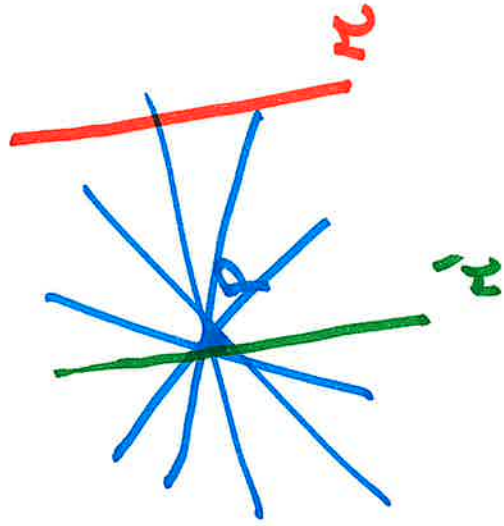
o ∞^2 rette

parallele.

Def: Si dice fascio proprio di rette per un punto $P \in AG_2(k)$

l'insieme di tutte le rette passanti per P .

P è detto centro del fascio.



oss: le rette di un fascio sono " $\infty^2 + 1$ "

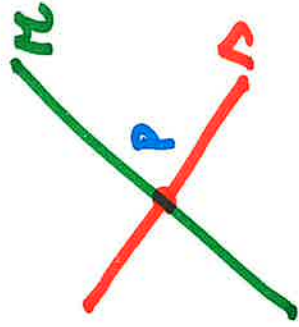
Sia $r \in AG_2(k)$ con $P \notin r \Rightarrow$ ogni retta per P non parallela ad r interseca r in un punto differente

$\Rightarrow$ le rette per P sono tante quante i punti di $r + 1$

$\Rightarrow$ per 2 punti passa una ed una sola retta.

oss: per 2 punti passa una ed una sola retta. 2 rette incidenti

in particolare 2 rette incidenti: $\neq$ identificano
 uno ed un solo fascio cui appartengono entrambe.



Le rette del fascio di centro $\pi \cap \Delta = \{P\}$ hanno
 equazioni che sono c. lineare della eq. di π e di Δ .

$\neq$

$$\pi: ax + by + c = 0$$

$$P = (x_P, y_P) \in \pi \cap \Delta$$

$$\Delta: a'x + b'y + c' = 0$$

$$\pi \not\parallel \Delta.$$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}: \alpha(ax_P + by_P + c) + \beta(a'x_P + b'y_P + c') = 0$$

$$\Rightarrow P \in \alpha\pi + \beta\Delta: \alpha(ax + by + c) + \beta(a'x + b'y + c') = 0$$

Vi dà t una retta per $P \Rightarrow$

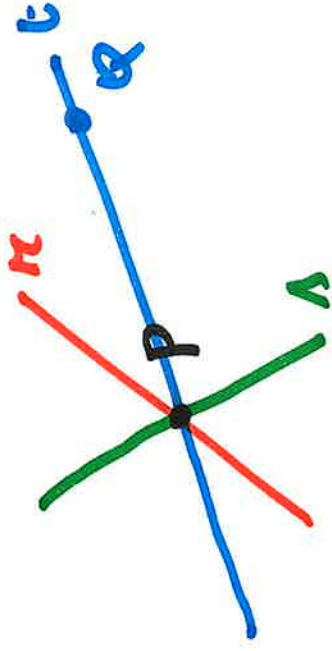
$$t: a''x + b''y + c'' = 0 \quad \text{eq. di } t$$

ed esistono un punto $Q \in t$ con $Q \neq P$

voglio far vedere

che $\exists \alpha, \beta$ tali

che $\alpha\pi + \beta\lambda = t$



mi basta far vedere che $\exists (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tali che

$Q \in \alpha\pi + \beta\lambda$ (perché per 2 punti $\exists$ unica
distinta)

$$\alpha(a'x_Q + b'y_Q + c) + \beta(a''x_Q + b''y_Q + c') = 0$$

N.B. NON PUÒ ESSERE $ax_2 + by_2 + c = a'x_2 + b'y_2 + c'$

Perché altrimenti: $Q \in \pi \cap \pi' = \{P\}$ $\forall Q \neq P$.

supponiamo $ax_2 + by_2 + c \neq 0$

$$\alpha = -\beta \frac{(a'x_2 + b'y_2 + c')}{(ax_2 + by_2 + c)}$$

∞^2 soluzioni

CONCLUSIONE: Le rette di un fascio proprio corrispondono alla retta di eq. da combinazione lineare di 2 qualsiasi rette distinte per il centro del fascio.

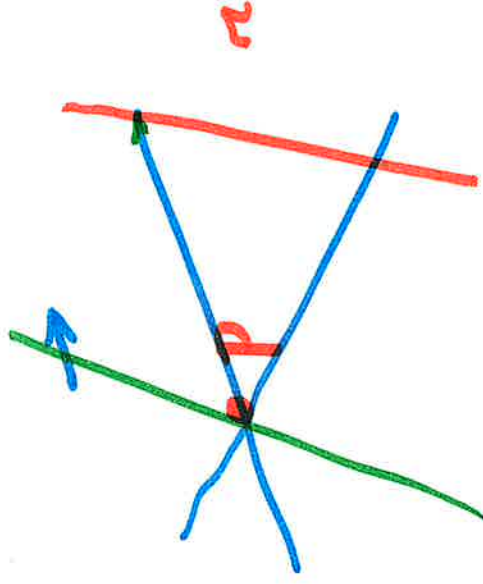
In particolare esiste una biiezione fra

$$\frac{\mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}}{\mathbb{K} \setminus \{0\}} =$$

$$= \{ L(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \neq (0,0) \} \text{ e } L$$



insieme di
tutte le possibili
direzioni di rette.

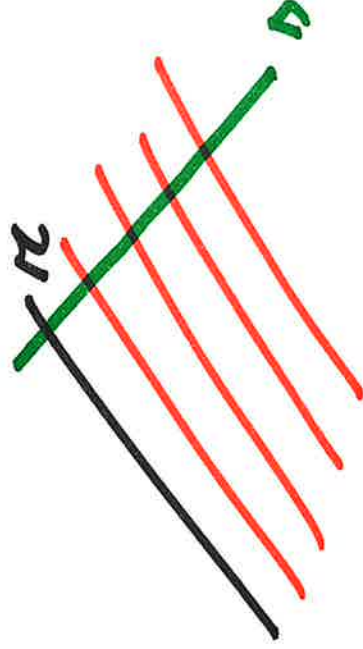


Def: Sia

$$r: ax+by+c=0.$$

Si dice fascio improprio della direzione di r l'insieme di tutte le rette parallele ad r .

Sia γ una retta non
parallela ad $r \Rightarrow$
A punto $P \in \gamma$
retta del fascio imp.
parallela ad r .



∞^2 rette.

Siano

r ed s due rette

parallele e distinte

$$r: ax+by+c=0$$

$$s: ax+by+c'=0$$

$$\alpha r + \beta s: (\alpha + \beta)(ax+by) +$$
$$\alpha c + \beta c' = 0 \quad (\alpha + \beta) \neq 0$$

$$ax + by + \frac{a}{\alpha + \beta}c + \frac{\beta}{\alpha + \beta}c' = 0$$

scegliendo α e β in modo opportuno
 ottengo ogni retta del tipo $ax + by + k = 0$
 con $k \in \mathbb{R}$.

$n=3$ fasci di piani

propri $\rightarrow$ piani per una
 retta (sostegno).
 impropri $\rightarrow$ piani con data
 giacitura
 (rette parallele)

I piani di un fascio proprio sono tutti e solo
 le c. lineari dei 2 piani che si intersecano
 nel sostegno.

in entrambi i casi ∞^2 piani.



4 incongruente.
3 nuove di prop.
 $\Rightarrow \# \text{piani} \infty^3$

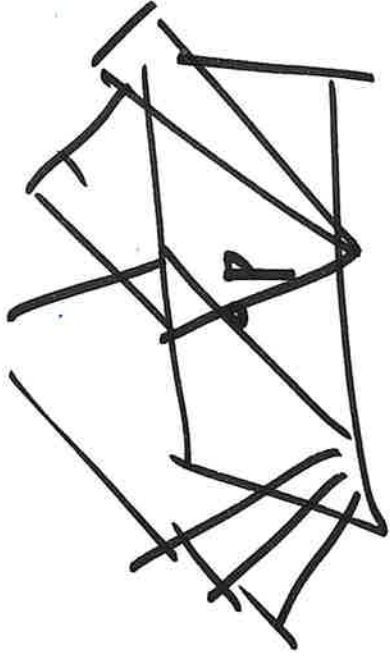
$$ax + by + cz + d = 0$$

passaggio per 2 punti distinti $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ deve contenere il sottospazio generato

da 2 punti. (=retta) $\Rightarrow \infty^2$ piani.

$\rightarrow$ scelta di piani $\rightarrow \infty^2$ piani $\left\{ \begin{array}{l} \text{proprio} \rightarrow \text{passaggi per 1 punto} \\ \text{improprio} \rightarrow \text{avere una dir. in comune.} \end{array} \right.$



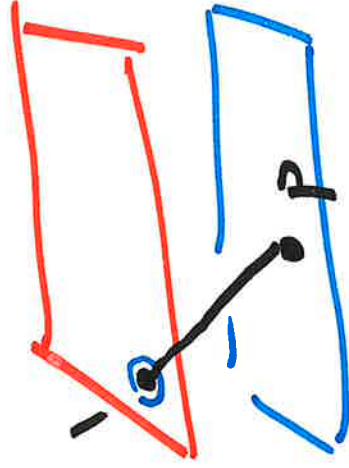
$n=3$ stelle di rette.

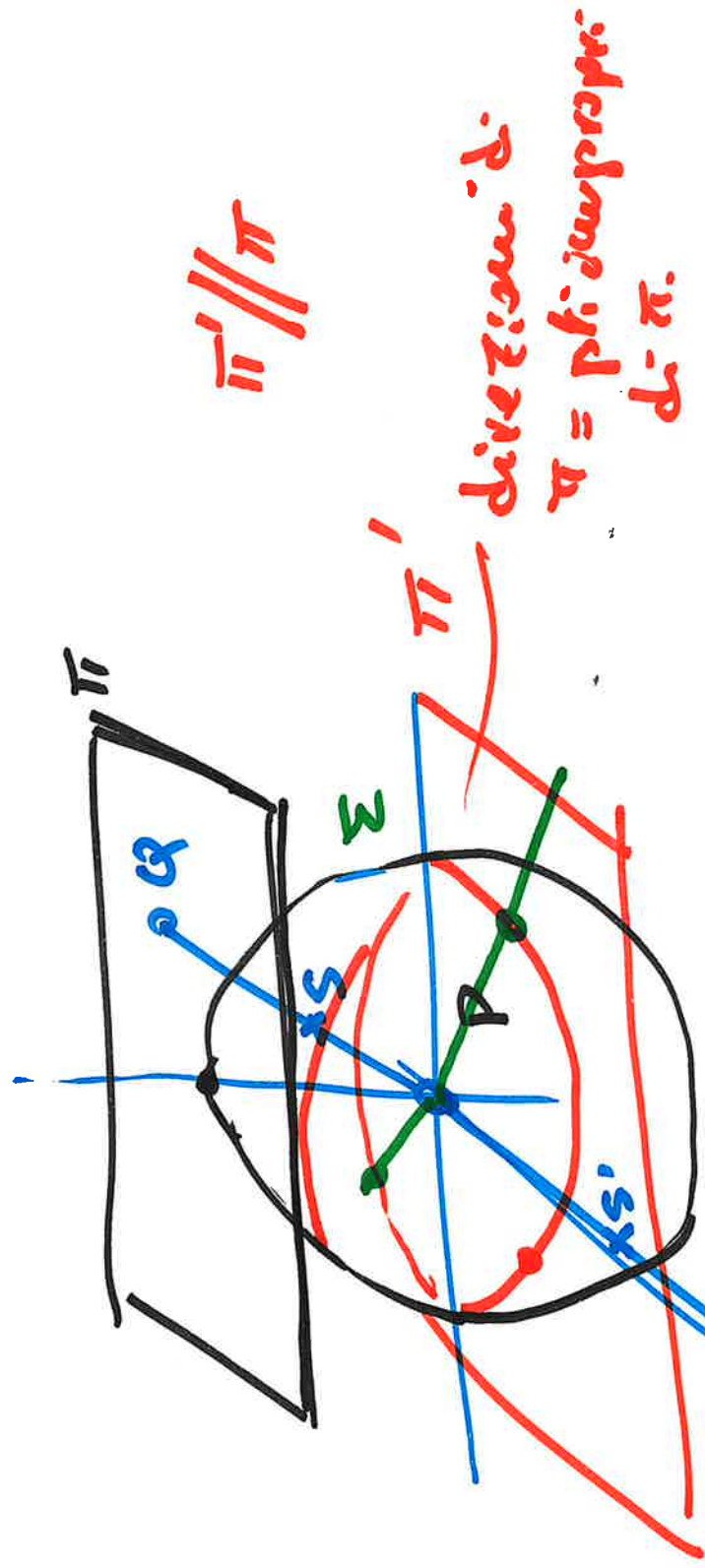
Le rette per un punto sono ∞^2

$$n \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

$$rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{cases} ax_p + by_p + cz_p + d = 0 \\ a'x_p + b'y_p + c'z_p + d' = 0 \end{cases}$$





Le rette del fascio per P
sono in corr. bi-univoca
con le coppie di punti:
aiipodali sulla sfera.

Inoltre i punti di π sono in corr. biunivoca con le coppie di punti satipodali della sfera non in π'

$$\begin{array}{c} // \\ -1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{inc.}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

oss: $\exists$ un sistema non banale

$\Leftrightarrow$ il sott. delle soluzioni non è

$AG_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{E_{NN} \Leftarrow 1}} \\ \underline{\underline{E_{NN} \Leftarrow 1}} \end{array} \quad \begin{array}{c} <4> \\ <4> \end{array} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$